Đề thi tuyển sinh vào 10 Sở GD&ĐT TP Hà Nội

Thực hiện bởi : Nhóm GV CLB Toán Hà Nội - HMC

1. Phần đề bài

Bài 1 $\left(\textbf{2,0 điểm}\right)$ **.** Cho hai biểu thức $A = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh rằng $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \cdot B = 4$.

Bài 2 $\left(\textbf{2,0 điểm}\right)$ **.**

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Theo kế hoạch, một phân xưởng phải làm xong 900 sản phẩm trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày phân xưởng đã làm được nhiều hơn 15 sản phẩm so với số sản phẩm phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 3 ngày trước khi hết thời hạn, phân xưởng đã làm xong 900 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải làm bao nhiêu sản phẩm? (Giả định rằng số sản phẩm mà phân xưởng làm được trong mỗi ngày là bằng nhau.)

2) Một khối gỗ dạng hình trụ có bán kính đáy là 30 cm và chiều cao là 120 cm. Tính thể tích của khối gỗ đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

Bài 3 $\left(\textbf{2,5 điểm}\right)$ **.**

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2}{x-3} - 3y = 1 \\ \dfrac{3}{x-3} + 2y = 8 \end{cases}$.

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm tất cả giá trị của m để

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}.$$

Bài 4 $\left(\textbf{3,0 điểm}\right)$ **.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S. Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng BC.

1) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

3) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE. Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K. Chứng minh $BQ \cdot BA = BD \cdot BI$ và đường thẳng CK song song với đường thẳng SO.

Bài 5 $\left(\textbf{0,5 điểm}\right)$ **.** Cho hai số thực dương a và b thoả mãn $a + b \leqslant 2$. Chứng minh $\dfrac{a^2}{a^2+b} + \dfrac{b^2}{b^2+a} \leqslant 1$.

2. Phần lời giải

Bài 1: 2,0 điểm

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh rằng $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \cdot B = 4$.

Lời giải.

1) Khi $x = 9$ (Thỏa mãn ĐKXĐ) thì

$$A = \frac{9+2}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}.$$

Vậy khi $x = 9$ thì $A = \dfrac{11}{3}$.

2) Ta có

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \frac{3-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \frac{\left(2\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+3-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \frac{2x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.
\end{aligned}$$

Vậy $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, kết thúc chứng minh.

3) Ta có

$$A \cdot B = \frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{2x+4}{\sqrt{x}+1}.$$

Để $A \cdot B = 4$ thì

$$\frac{2x+4}{\sqrt{x}+1} = 4,$$

tương đương với

$$2x + 4 = 4\sqrt{x} + 4,$$

hay

$$2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right) = 0.$$

Khi đó $x = 0$ (không thỏa mãn ĐKXĐ) hoặc $x = 4$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy để $A \cdot B = 4$ thì $x = 4$.

Bài 2: 2,0 điểm

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Theo kế hoạch, một phân xưởng phải làm xong 900 sản phẩm trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày phân xưởng đã làm được nhiều hơn 15 sản phẩm so với số sản phẩm phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 3 ngày trước khi hết thời hạn, phân xưởng đã làm xong 900 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải làm bao nhiêu sản phẩm? (Giả định rằng số sản phẩm mà phân xưởng làm được trong mỗi ngày là bằng nhau.)

2) Một khối gỗ dạng hình trụ có bán kính đáy là 30 cm và chiều cao là 120 cm. Tính thể tích của khối gỗ đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

Lời giải.

1) Gọi số sản phẩm mỗi ngày phân xưởng phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm, $x > 0$).

Khi đó số sản phẩm mỗi ngày phân xưởng làm được theo thực tế là $x + 15$ (sản phẩm).

Thời gian để phân xưởng hoàn thành công việc theo kế hoạch là: $\dfrac{900}{x}$ (ngày).

Thời gian mà phân xưởng hoàn thành công việc theo thực tế là: $\dfrac{900}{x+15}$ (ngày).

Theo đề, ta có phương trình

$$\frac{900}{x} = \frac{900}{x+15} + 3.$$

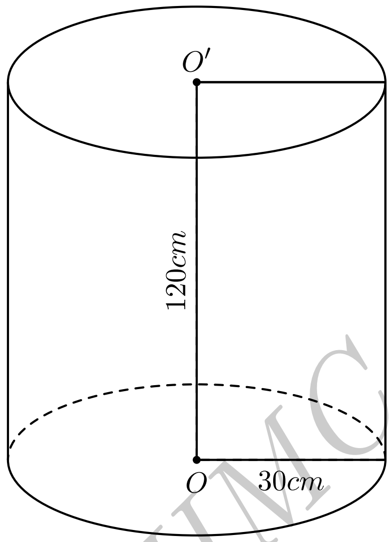
Giải phương trình ta được $x = 60$ (Thỏa mãn điều kiện) hoặc $x = -75$. (Loại)

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải làm 60 sản phẩm.

2) Thể tích khối gỗ là thể tích của hình trụ có bán kính đáy $r = 30cm$ và chiều cao $h = 120cm$, và bằng

$$V = \pi.r^2.h = \pi.30^2.120 \approx 339120(cm^3).$$

Vậy thể tích khối gỗ xấp xỉ $339120cm^3$.



Bài 3: 2,5 điểm

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2}{x-3} - 3y = 1 \\ \dfrac{3}{x-3} + 2y = 8 \end{cases}$.

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = (m+2)x - m$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm tất cả giá trị của m để

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}.$$

Lời giải.

1) Điều kiện $x \neq 3$. Từ hệ phương trình ta suy ra

$$2.\left(\frac{3}{x-3} + 2y\right) - 3.\left(\frac{2}{x-3} - 3y\right) = 2.8 - 3.1$$

Vì thế $13y = 13$. Nên $y = 1$, khi đó $x = \dfrac{7}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = \left(\dfrac{7}{2}, 1\right)$

2) **a)** Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = (m+2)x - m$ tương đương

$$x^2 - (m+2)x + m = 0 \qquad (1)$$

Ta có $\Delta = [-(m+2)]^2 - 4.1.m = m^2 + 4 > 0$ với mọi số thực m. Vì thế phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên theo hệ thức Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$$

Lại có

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1+x_2-2}$$

tương đương với

$$\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=\frac{1}{x_1+x_2-2},$$

lưu ý $x_1,x_2\neq 0$ và $x_1\neq x_2$ nên $m\neq 0$, nên ta có $\dfrac{m+2}{m}=\dfrac{1}{m}$.

Khi đó $m=-1$. (Thỏa mãn điều kiện) Vậy $m=-1$.

Bài 4: 3,0 điểm

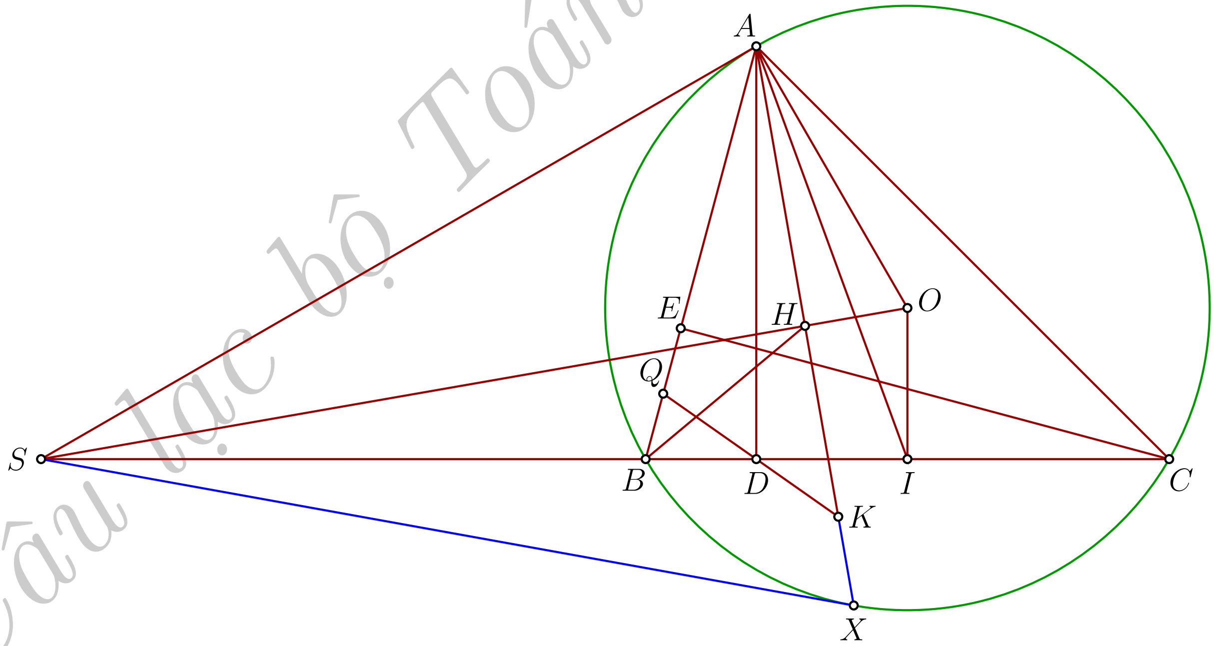
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S. Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng BC.

1) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC. Chứng minh $\widehat{OAH}=\widehat{IAD}$.

3) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE. Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K. Chứng minh $BQ\cdot BA=BD\cdot BI$ và đường thẳng CK song song với đường thẳng SO.

Lời giải.



1) Do I là trung điểm BC nên $OI\perp BC$.

Lại có SA là tiếp tuyến tại A của (O) suy ra $\widehat{SAO}=90^\circ$.

Từ đó

$$\widehat{OAS}+\widehat{OIS}=180^\circ$$

Dẫn tới tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp, kết thúc chứng minh.

2) Từ a) suy ra tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp, dẫn tới

$$\widehat{OAI} = \widehat{OSI} \tag{1}$$

Lại có:

$$\widehat{AHS} = \widehat{ADS} = 90^\circ.$$

Suy ra $AHDS$ là tứ giác nội tiếp, dẫn tới

$$\widehat{DAH} = \widehat{OSI} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OAI} = \widehat{DAH}$, dẫn tới

$$\widehat{OAI} + \widehat{HAI} = \widehat{DAH} + \widehat{HAI} \Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{IAD}$$

Kết thúc chứng minh.

3) **Cách 1:** Xét tam giác BEC có: Q là trung điểm đoạn BE, I là trung điểm đoạn BC.

Suy ra QI là đường trung bình tam giác BEC

Dẫn tới $QI \parallel CE$ mà $CE \perp AB$ suy ra $QI \perp AB$, dẫn tới

$$\widehat{AQI} = \widehat{ADI} = 90^\circ.$$

Do đó $AQDI$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{AID} = \widehat{BQD}.$$

Xét tam giác BQD và tam giác BIA có: $\widehat{AID} = \widehat{BQD}$ và chung $\widehat{B}$, suy ra

$$\triangle BQD = \triangle BIA \ (g-g)$$

Suy ra

$$\frac{BQ}{BI} = \frac{BD}{BA} \text{ hay } BQ \cdot BA = BI \cdot BD.$$

Xét tam giác AQK ta có:

$$\widehat{AKQ} = \widehat{BQK} - \widehat{BAH} = \widehat{BIA} - \widehat{BAH}$$

(do $AQDI$ là tứ giác nội tiếp) Ta lại có :

$$\widehat{BAH} = \widehat{BAD} + \widehat{DAH} = \widehat{OAC} + \widehat{DAH} = \widehat{OAC} + \widehat{OAI} = \widehat{IAC}.$$

Suy ra

$$\widehat{AKQ} = \widehat{BIA} - \widehat{BAH} = \widehat{BIA} - \widehat{IAC} = \widehat{ACB}.$$

Dẫn tới $ACKD$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $CK \perp AK$ hay $CK \parallel SO$.

Cách 2: Kéo dài tia AK cắt đường tròn tại điểm X. Dễ dàng chứng minh SX là tiếp tuyến của (O).

Tứ giác QADI nội tiếp suy ra
$$\widehat{BQK} = \widehat{BIA}.$$
Tứ giác $AOIS$ nội tiếp suy ra
$$\widehat{BIA} = \widehat{SOA} = \frac{1}{2}\widehat{AOX} = \widehat{ACX} = 180^\circ - \widehat{ABX}.$$
Dẫn tới
$$\widehat{BQK} + \widehat{ABX} = 180^\circ.$$
Suy ra $BX \parallel QK$.

Lại có $\widehat{CDK} = \widehat{QDB} = \widehat{CBX} = \widehat{CAX}$ (Do $QK \parallel BX$)

Suy ra tứ giác $ADKC$ nội tiếp, từ đó $\widehat{CKA} = \widehat{CDA} = 90^\circ$, suy ra $CK \parallel SO$ (cùng vuông góc với AH)

Bài 5: 0,5 điểm

Cho hai số thực dương a và b thoả mãn $a + b \leqslant 2$. Chứng minh $\dfrac{a^2}{a^2+b} + \dfrac{b^2}{b^2+a} \leqslant 1$.

Lời giải.

Cách 1: Bất đẳng thức tương đương với
$$a^2(b^2+a) + b^2(a^2+b) \leqslant (a^2+b)(b^2+a)$$
tương đương với $ab(ab-1) \leqslant 0$.

Điều này luôn đúng vì $a, b > 0$ nên $ab > 0$ và theo bất đẳng thức Cô si thì
$$ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} \leqslant 1.$$
Bất đẳng thức được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$.

Cách 2: Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì
$$(a^2+b)(1+b) = [a^2 + (\sqrt{b})^2][1^2 + (\sqrt{b})^2] \geqslant (a+b)^2.$$
Tương tự ta có
$$(b^2+a)(1+a) \geqslant (b+a)^2,$$
lưu ý $a, b > 0$. Đến đây ta có
$$\frac{a^2}{a^2+b} + \frac{b^2}{b^2+a} = \frac{a^2(1+b)}{(a^2+b)(1+b)} + \frac{b^2(1+a)}{(b^2+a)(1+a)} \leqslant \frac{a^2+b^2+ab(a+b)}{(a+b)^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+2ab}{(a+b)^2} = 1.$$
Kết thúc chứng minh.

Cách 3: Đặt $P = \dfrac{a^2}{a^2+b} + \dfrac{b^2}{b^2+a}$. Khi đó, theo bất đẳng thức cộng mẫu
$$2 - P = \frac{b}{a^2+b} + \frac{a}{b^2+a} = \frac{b^2}{a^2b+b^2} + \frac{a^2}{ab^2+a^2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{ab(a+b)+a^2+b^2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{2ab+a^2+b^2} = 1.$$
Do đó $P \leqslant 1$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$.

Phép chứng minh hoàn tất.